



## H. MARKOWITZ‘O MODELIO TINKAMUMO BALTIJOS VERTYBINIŲ POPIERIŲ BIRŽAI TIKRINIMAS

Aušrinė ZAKARKAITĖ<sup>1</sup>, Viktoras FILIPAVIČIUS<sup>2</sup>

*Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Verslo vadybos fakultetas, Finansų inžinerijos katedra,  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva  
El. paštas: <sup>1</sup>a.zakarkaitė@stud.vgtu.lt; <sup>2</sup>viktoras.filipavicius@vgtu.lt*

**Santrauka.** Straipsnyje siekiama išsiaiškinti H. Markowitz‘o efektyvaus portfelio teorijos (modelio) tinkamumą Baltijos šalių vertybinių popierių biržai. Autoriai analiziškai išsprendė H. Markowitz‘o uždavinį efektyviam portfeliui rasti, penkių aktyvų atveju. Pasirinktoms penkioms likvidžiausioms Baltijos šalių vertybinių popierių biržos akcijoms buvo nustatyta minimalios dispersijos aibė ir patikrinta, ar realus šių akcijų portfelis yra efektyvus, H. Markowitz‘o teorijos požiūriu. Gauta, kad realus portfelis yra arti globalaus dispersijos minimumo taško. Taip pat, atskiru investavimo į likvidžiausias penkias akcijas atveju, gauta, kad investuotojai yra konservatyvūs, t. y. jie investuoja į akcijų portfelį su mažiausia rizika (mažiausia portfelio grąžos dispersija). Ateityje autoriai planuoja tęsti šį tyrimą Baltijos šalių vertybinių popierių biržos indeksams bei didesniai akcijų skaičiui, siekdami patikrinti hipotezę, kad ir kitoms akcijoms galioja šio tyrimo atskleisti dėsningumai.

**Reikšminiai žodžiai:** akcijų portfelis, efektyvus akcijų portfelis, H. Markowitz‘o portfelio teorija, portfelio grąža, portfelio grąžos dispersija, portfelio optimizavimas, vertybinių popierių birža.

### Įvadas

Investavimas į akcijas yra viena populiariausių investavimo krypčių visame pasaulyje, tačiau investicijos į akcijas kaip ir į bet kurį kitą finansinį instrumentą turi tam tikrą rizikos lygį. Kiekvienas investuotojas iš investicijos tikisi gauti tam tikros naudos (grąžos), esant minimaliam arba investuotojui priimtinau rizikos (prarasti investuotas lėšas) lygiui. Investuotojai dažniausiai investuoja ne į atskirus vertybinius popierius, o į diversifikuotą vertybinių popierių portfelį, kuris leidžia sumažinti investavimo riziką. Į vertybinių popierių portfelį įtraukus atsitiktinius vertybinius popierius, ne visuomet sumažinama rizika bei gaunama pageidaujama grąža. Todėl investuotojas, norintis investuoti ilgesniam laikotarpiui, turėtų atkreipti dėmesį, kokių įmonių akcijos sudarys jo investicinį portfelį, iš kurio jis gautų didžiausią pageidaujamą grąžą ir galimai nepatirtų nuostolių. Vertybinių popierių portfelį, kuris artimas mūsų šiandieniam portfelio suvokimui, nagrinėjo Harry Markowitz. Jis laikomas moderniosios portfelio teorijos, sukurtos 1952 m., pradininku. Modernioji portfelio teorija nagrinėja portfelio sudarymo problemą, t. y. tikslinių finansinių priemonių įtraukimo į investicinį portfelį problemą.

Priimant sprendimą, kada ir kokias akcijas pirkti bei parduoti, investuotojai vadovaujasi įvairiomis strategijomis, kurių daugelio pagrindu nėra fundamentinė akcijų analizė. Tačiau, kaip ekonomikoje pasireiškia nematoma „Adamso ranka“, taip, galbūt, ir prekiaujant akcijomis biržoje, pasireiškia savotiška ranka, kuri optimizuoja investuotojų portfelius. Autoriai iškelia hipotezę, kad realiai egzistuojantys investiciniai portfeliai yra optimalūs H. Markowitz‘o teorijos prasme, t. y., egzistuojančiai portfelio grąžai jo grąžos dispersija yra minimali.

*Tyrimo objektas:* Baltijos šalių vertybinių popierių birža. Ši birža pasirinkta todėl, kad ji yra nedidelė ir jai lengviau galima pritaikyti autorių gautus analizinius sprendinius akcijų portfeliams.

*Tyrimo tikslas:* patikrinti, ar Baltijos šalių vertybinių popierių birža elgiasi H. Markowitz‘o modelis.

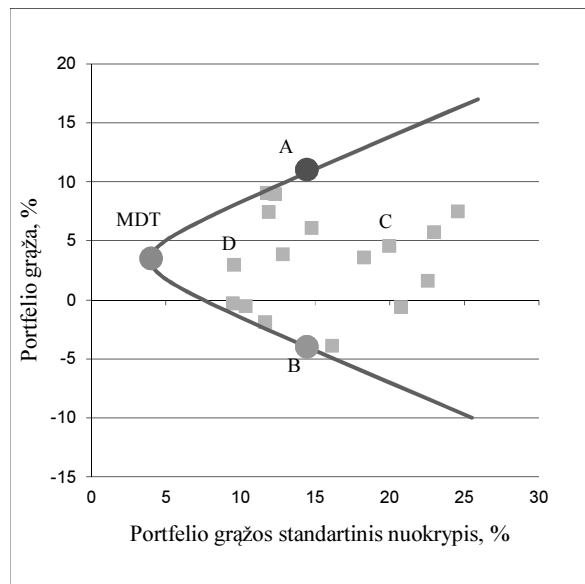
Užsibrėžtam tikslui pasiekti iškelti tyrimo *uždaviniai*:

1. atlikti mokslinės literatūros apie H. Markowitz‘o modelį apžvalgą;
2. analiziniu būdu gauti penkių akcijų portfelio dispersijos priklausomybę nuo portfelio grąžos;
3. iš pasirinktų penkių, vienų likvidžiausių akcijų Baltijos šalių vertybinių popierių biržoje, apskaičiuoti portfelio minimalios dispersijos aibę;
4. remiantis penkių akcijų kapitalizacijos duomenimis, rasti šių penkių akcijų portfelio grąžą bei dispersiją ir patikrinti, ar šis portfelis priklauso H. Markowitz‘o modelio rėmuose apskaičiuotai minimalios dispersijos aibei.

Tyrimo metodika: mokslinės literatūros analizė, skaičiavimas, tiesinių lygčių sistemos sprendimas, biržos prekybos duomenų statistinių rodiklių skaičiavimas, grafinis duomenų atvaizdavimas.

### Modernios portfelio teorijos analizė

Šiuolaikinė portfelio teorija buvo sukurta 1952 m. H. Markowitz'o. Ši teorija siekia padidinti akcijų portfelio laukiamą grąžą esant tam tikram rizikos lygiui. Kitaip tariant, ši teorija siekia minimizuoti portfelio riziką esant tam tikram pelningumui, tinkamai pasirinkus portfelio elementus (Esfahani *et al.* 2016). H. Markowitz laikomas modernios portfelio teorijos pradininku ir apdovanotas Nobelio premija. Būtent H. Markowitz'as pirmasis pasiūlė efektyvaus portfelio terminą (Cibulskienė, Grigaliūnienė 2007) bei panaudojo tokius terminus kaip portfelio grąža, portfelio rizika, portfelio diversifikavimas (Žilinskij, Rutkauskas 2012). Efektyvus portfelis, tai portfelis, turintis mažiausią riziką esant tam tikrai grąžai arba didžiausią grąžą esant tam tikram rizikos lygiui (Cibulskienė, Grigaliūnienė 2007). Markowitz'o teigimu, geriausias būdas sumažinti riziką yra portfelio diversifikavimas. Efektyvus finansinių instrumentų paskirstymas yra svarbus mechanizmas, norint sudaryti efektyvų investicinį portfelį ir pasiekti investuotojo laukiamą pelningumą (Jurevičienė, Jakavonytė 2015). H. Markowitz'o naudojamos pagrindinės charakteristikos nagrinėjant efektyvaus portfelio problemą – laukiama grąža ( $r_p$ ) ir rizika ( $\sigma_p$ ) (Žilinskij, Rutkauskas 2012). H. Markowitz manymu, portfelį geriausia formuoti ant efektyvios kreivės, ant kurios optimizuojama grąža esant tam tikram rizikos lygiui. Pažymėtina, kad H. Markowitz'o modelis nenustato investuotojui optimalaus investicinio portfelio, H. Markowitz'o modelis apibrėžia minimalios dispersijos kreivę, kurioje visi portfeliai yra efektyvūs. (Cibulskienė, Grigaliūnienė 2007). Efektyvus portfelis apibūdinamas kaip portfelis, kuris turi mažiausią riziką duotai grąžai arba didžiausią grąžą duotam rizikos lygiui. Būtent tokio portfelio ir turėtų siekti racionalūs investuotojai. H. Markowitz'as padarė prielaidas, kad investuotojai mėgsta pelną ir vengia rizikos, sprendimus priima racionaliai bei investuotojai priima sprendimus, kad maksimizuotų būsimą naudą, kuri yra planuojamo pelningumo ir rizikos funkcija (Kancerevyčius 2009). Kaip jau buvo minėta anksčiau, H. Markowitz'o modelis pagrįstas planuojamos grąžos ir rizikos sąvokomis. H. Markowitz'o modeliui reikalinga planuojama kiekvieno atskiro instrumento grąža, grąžos standartinis nuokrypis, kaip kiekvieno instrumento rizikos matas, kuris parodo rizikos laipsnį (kuo didesnis standartinis nuokrypis, tuo didesnė yra rizika ir atvirkščiai) (Jurevičienė, Bapkauskaitė 2014) bei instrumentų grąžos kovariacija (instrumentų grąžos ryšio matas) (Žilinskij, Rutkauskas 2012). 1 pav. pavaizduota galimų portfelijų aibė, o jos gauti (minimalios dispersijos kreivė) yra kulkos pavidalo. Lietuvių autoriai skirtingai verčia anglišką terminą „minimal variance curve“. Vieni šį terminą vadina kaip „kriterinė aibės riba (kontūras) (Rutkauskas, Martinkutė 2007), kitur sutinkamas terminas „mažiausios dispersijos portfelijų aibė“ (Valakevičius 2008). Minimalios dispersijos aibė apima visus įmanomus ir įvairiomis proporcijomis sudarytus portfelius iš tam tikro vertybinių popierių skaičiaus (Cibulskienė, Grigaliūnienė 2007).



1 pav. H. Markowitz'o minimalios dispersijos kreivė (parengta autorių pagal Haugen (2001))  
Fig. 1. H. Markowitz'o minimum dispersion curve (prepared according to the authors Haugen (2001))

Grafike storąją liniją pavaizduota minimalios dispersijos kreivė, ant kurios taškas „MDT“ žymi portfelį, turintį mažiausią galimą standartinį nuokrypį (riziką) ir padalina minimalios dispersijos kreivę į viršutinę ir apatinę ribas.

Kiti taškai ant linijos (C ir D) vaizduoja įvairiomis proporcijomis sudarytus akcijų portfelius. Investuotojui, turint tam tikrą akcijų kiekį, investavimo galimybes apibrėžia minimalios dispersijos kreivė. Viršutinė kreivės riba yra vadinama efektyviąja kreive, kadangi ant šios kreivės išsidėstę portfeliai investuotojui rodo, kad esant tam tikrai laukiamai grąžai, portfelis esantis ant efektyviosios kreivės, turi mažiausią standartinį nuokrypį (riziką). Ant efektyviosios kreivės suformuoti portfeliai yra suformuoti iš pasirinktų akcijų, tačiau skirtingais svoriais. Atsižvelgiant į užfiksuotą rizikos lygį arba investuotojui priimtina rizikos lygį, investuotojas rinksis pozicijas su aukštesne laukiama grąža, arba esant pasirinktai grąžai, investuotojas pasirinks pozicijas su mažesne rizika. Pavyzdžiui, analizuojant 1 pav. atvaizduotą atvejį, esant 15 proc. rizikai, investuotojas gali rinktis portfelius, pažymėtus taškais A ir B. Taškas A yra ant efektyviosios kreivės, o tai reiškia, kad esant 15 proc. rizikai, portfelis, esantis taške A, duos didžiausią grąžą, priešingai nei portfelis, esantis taške B, nors jo rizika taip pat 15 proc. Šiuo atveju, portfelis, esantis taške A, yra ant efektyviosios kreivės ir jo grąža sieks apie 11 proc., o portfelio, esančio taške B, grąža bus neigiama, t. y. apie – 4 proc. Taigi, patraukliausios pozicijos išsidėsčiusios ant efektyviosios kreivės. Portfeliai, kurie 1 pav. išsidėstę dešinėje kreivės pusėje (taškai C, D), nėra optimalūs.

Pagrindiniai portfelio diversifikavimo principai pasitelkia portfelį sudarančių aktyvų grąžą ir riziką. Ši teorija kritikuojama dėl to, kad moderniosios portfelio teorijos koncepcija remiasi standartiniu nuokrypiu ir aktyvų tarpusavio koreliacija, kurie apskaičiuojami remiantis praėjusio laikotarpio aktyvų kainų dinamika, t. y. remiantis istoriniais duomenimis, kurie dažnai netiksliai parodo būsimas aktyvų kainų tendencijas (Jurkonytė-Dumbliauskienė, Paužulis 2016).

Nepaisant didelės modelio sėkmės akademinuose sluoksniuose, praktinis šio modelio pritaikymas nebuvo sėkmingas, kadangi buvo pastebėta, kad pagal portfelio optimizavimo metodą optimizuoti portfeliai nepasižymi geru investicijų išskaidymu ir investiciniu stabilumu (Vilkancas 2014).

Mokslinėje literatūroje H. Markowitz'o modelis dažniausiai įvardijamas kaip daug sudėtingų matematinių skaičiavimų reikalaujantis modelis. Dažniausiai modernios portfelio teorijos temos tyrimai orientuoti į labai sudėtingus, kompleksiškus ir statistiškai paremtus matematinius skaičiavimus ir formules, kurios palaiko teorines prielaidas. Taip pat H. Markowitz'o modernios portfelio teorijos modelis kritikuojamas dėl to, kad šis modelis daro prielaidą, kad vertybinių popierių rinka yra veiksminga, t. y. neįvertinami galimi kiti rinką veikiantys veiksniai. Taip pat daroma prielaida, kad visi investuotojai yra racionalūs ir siekia maksimaliai padidinti pelną, tuo pačiu sumažinant riziką, tačiau atlikti rinkos dalyvių tyrimai rodo, kad investuotojai elgiasi taip, kaip ir kiti investuotojai, arba klauso visko, kas jiems yra sakoma (naujienos ir pan.), t. y. rinkos dalyvių investavimo sprendimai priimami neatsižvelgiant į siekį maksimaliai sumažinti riziką ir padidinti pelną (Mangram 2013). H. Markowitz'o modelio pagrindinė problema yra ta, kad jam reikia apskaičiuoti visų portfelio instrumentų grąžas, kovariacijas tarp visų instrumentų (Kancerevyčius 2009).

H. Markowitz'o modelį sudaro tokia lygčių sistema:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1, \quad (1)$$

$$r_p = \sum_{i=1}^n X_i r_i, \quad (2)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j Cov_{ij}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial X_1} = 0, \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial X_2} = 0, \dots, \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial X_{n-2}} = 0. \quad (4)$$

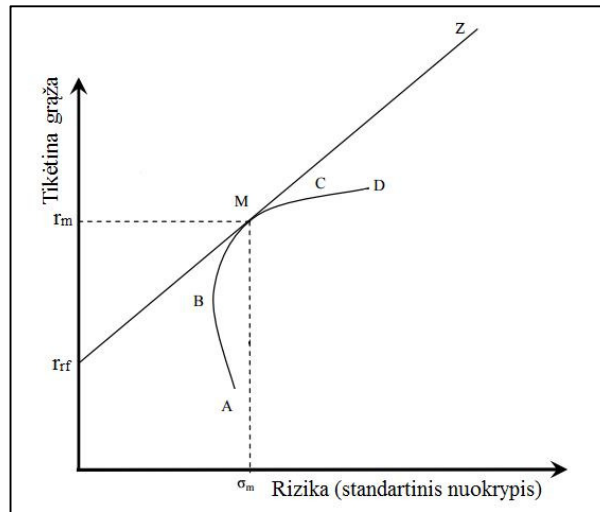
Formulė (1) yra sąlyga, kad akcijų portfelyje esančių akcijų svorių  $X_i$  suma turi būti lygi 1. Formulė (2) aprašo laukiamą portfelio grąžą  $r_p$ . Čia  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  – atskirų akcijų 1, 2, 3, ...,  $n$  grąža. Formulė (3) leidžia apskaičiuoti portfelio grąžos dispersiją (riziką)  $\sigma_p^2$ . Čia  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$  – atskirų akcijų dispersija (rizika),  $Cov_{ij}$ , yra akcijų  $i$  ir  $j$  grąžos kovariacija. Lygtys (4) yra papildomas reikalavimas, kad portfelio dispersija  $\sigma_p^2$  būtų minimali.

Taigi, pasirinkus pageidaujama portfelio grąžą  $r_p$ , reikia išspręsti lygčių (1)–(4) sistemą ir rasti tokią svorių  $X_1, X_2, \dots, X_n$  kombinaciją, kad  $\sigma_p^2$  įgytų mažiausią galimą dydį.

H. Markowitz'o sukurta moderni portfelio teorija paskatino kitus mokslininkus dirbti šia kryptimi ir tobulinti H. Markowitz'o sukurta pirminį modelį. Žymūs H. Markowitz'o pasekėjai, kurie tikslino (tobulino) H. Markowitz'o teoriją: James Tobin 1958 m. „Atskyrimo teorema“, William Forsyth Sharpe 1963 m. „Kapitalinių aktyvų įkainojimo modelis (CAPM)“, Jack Treynor 1973 m. „Treynor rodiklis“, Stephen Ross 1976 m. „Arbitražo įkainojimo teorija (APT)“, Eugene Fama ir Kenneth French 1993 m. „Trijų veiksmų modelis“ (Heaton *et al.* 2016).

H. Markowitz'o pasekėjas James Tobin, siekdamas supaprastinti H. Markowitz'o teorijos praktinį pritaikymą, pagerino H. Markowitz'o modelį. Pasak H. Markowitz'o, investuotojas turėtų išnagrinėti visus galimus saugius portfelio derinius ir pagal rizikos arba gražos normą pasirinkti efektyviausius. H. Markowitz'as nagrinėjo portfelių sudarymą vien tik iš rizikingų aktyvų, tačiau nebuvo vertinamos galimybės padidinti nuosavų investicijų pelningumą derinant rizikingą ir nerizikingą turta. Kapitalo rinkos teorija leidžia nustatyti efektyviąją portfelių aibę, kai rinkoje yra nerizikingo skolinimo ir skolinimosi galimybės. James Tobin supratimu, investuotojai gali pasirinkti savo portfelį sudaryti tiek iš rizikingo finansinio turto, tiek iš nerizikingo finansinio turto (pavyzdžiui vyriausybės išdo vekseliai), t. y. James Tobin į portfelį pasiūlė įtraukti nerizikingus vertybinius popierius (atskyrė portfelyje esančius rizikingus ir nerizikingus aktyvus). James Tobin 1958 m. sukūrė teoriją, kuri pavadinta „Atskyrimo teorema“, t. y. atskyrė investuotojo galimybę investuoti į rizikingus ir nerizikingus aktyvus portfelyje. Jis į dvi dalis padalino efektyvaus portfelio suradimo problemą:

1. Optimalaus rinkos portfelio suradimas;
2. Rizikingų ir nerizikingų aktyvų portfelyje pasirinkimas.



2 pav. Kapitalo rinkos tiesė (Bilgin, Basti 2011)  
Fig. 2. Capital market straight (Bilgin, Basti 2011)

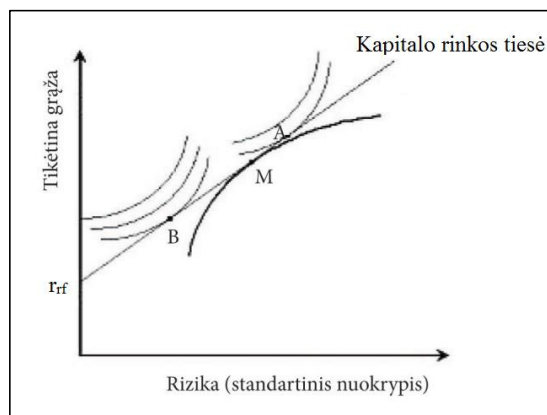
Pirmame, iš paminėtų aukščiau, žingsnyje James Tobin apibendrina, kad ant efektyviosios kreivės yra vienintelis galimas optimalus portfelis su graža  $r_m$  ir standartiniu nuokrypiu  $\sigma_m$ , o kartu skolinimasis ir skolinimas. Pirmiausia investuotojas turėtų pasirinkti optimalų portfelį (taškas M ant minimalios dispersijos kreivės ABCD). Taigi, rizikingų aktyvų įtraukimo į portfelį problema išsprendžiama vienareikšmiškai, o ne pateikiant galimų sprendimų aibę, kaip kad H. Markowitz'o modelio atveju (Rutkauskas, Žilinskij 2010). Tuomet paaiškėja, kad įmanomas tik vienintelis optimalus portfelis bei skolinimosi galimybės (Dauginytė 2009). Vėliau, remdamasis rinkos tolerancija, investuotojas priima finansavimo sprendimą – paskolinti ar pasiskolinti už nerizikingą palūkanų normą siekiant toleruojamo rizikos lygio (Cibulskienė, Grigaliūnienė 2007). 2 pav. pavaizduota situacija, kai investicija į rizikingus aktyvus (taškas M) yra papildoma nerizikingu (jo gražos dispersija yra lygi nuliui) aktyvu su graža  $r_{rf}$ . Toks mišrus portfelis atvaizduojamas nebe minimalios dispersijos kreive ABCD, o kapitalo rinkos tiesė ( $r_{rf}MZ$ ).

Pasak Cibulskienės D. ir Grigaliūnienės Ž., jei investiciniam sprendimams priimti būtų naudojama James Tobin teorija, kuri nusako, kad egzistuoja tik viena efektyvumo kreivė visiems investuotojams, tuomet visi investuotojų optimalūs portfeliai būtų vienodi, kas reikštų, kad rinkos portfelis (indeksas) turėtų užtikrinti investuotojui optimalų portfelį. Atsižvelgiant į tai, kad kiekvieno investuotojo rizikos toleravimo lygis yra skirtingas, daroma išvada, kad negali būti vienos efektyvumo kreivės ir vieno optimalaus portfelio rinkinio.

Priklausomai nuo to, kokį rizikos lygį toleruoja investuotojas, 3 pav. grafiškai atvaizduoti skirtingi investuotojų priimami finansavimo sprendimai (Cibulskienė, Grigaliūnienė 2007).

3 pav. pažymėtame taške A yra didesnį rizikos tolerancijos lygį turinčio investuotojo sprendimas, taške B – mažesnį rizikos toleravimo lygį turinčio investuotojo sprendimas.

Rutkauskas V. ir Žilinskij G., straipsnyje „Financial leverage usage for active management of the investment portfolio“ pažymėjo, kad J. Tobin pasiūlyta atskyrimo teorema, priimant sprendimus, turėtų būti išplėsta, t. y. taikydama šį modelį, investuotojas sprendimų priėmimą turėtų išskaidyti ne į dvi dalis, kaip jau buvo minėta anksčiau, o į tris: preliminarus investavimo sprendimo priėmimą, finansavimo sprendimo priėmimą bei investavimo sprendimo patikslinimą, jei patikslinimas leidžia padidinti pelningumą neviršijant rizikos tolerancijos lygio.



3 pav. Skirtingų investuotojų priimami finansavimo sprendimai (Rutkauskas, Žilinskij 2010)  
Fig. 3. Financial solutions accepted by different investors (Rutkauskas, Žilinskij 2010)

James Tobin teorema padėjo investuotojui pasirinkti optimalų portfelį bei skolinimosi ir skolinimo galimybes, tačiau jis nepateikė paprastesnio būdo optimalaus portfelio pasirinkimui negu buvo pasiūlęs H. Markowitz (Bilgin, Basti 2011).

Tiek H. Markowitz'o, tiek James Tobin teorijos nebuvo lengvai pritaikomos praktiškai. Norint išmatuoti diversifikacijos naudą, pagal H. Markowitz'o modelį reikia apskaičiuoti grąžas ir jų kovariacijas tarp kiekvienos portfelio elementų poros, H. Markowitz'o mokinys, JAV ekonomistas W. Sharpe 1963 m. išsprendė šią problemą, pateikdamas supaprastintą modelį, vadinamą rinkos modeliu (CAPM – Capital Asset Pricing Model, ang.) ir taip pat kaip ir H. Markowitz'as buvo apdovanotas Nobelio premija. Šiam modeliui apskaičiuoti reikėjo paprastesnių matematinų procedūrų ir resursų. Jis buvo sukurtas taip, kad nesudėtingus pajamingumo ir rizikos skaičiavimus galima būtų atlikti be sudėtingos skaičiavimo technikos. W. Sharpe pastebėjo, kad atskirų aktyvų (akcijų) vertė, daugiau ar mažiau kinta kartu su rinka. W. Sharpe šiame modelyje išskyrė sisteminę ir nesisteminę riziką, kurios lemia portfelio grąžą. Sistemine – tai rizika, kuri yra lemiamą veiksnį, veikiančių visą rinką. Nesisteminė – tai rizika, kuri lemiamą neigiamų veiksnį, susijusių tik su bendrovės verslo praktika arba darbo problemomis (Suarez 2015). Jos abi sudaro bendrą portfelio būdingą riziką, kuri yra išmatuojama standartiniu nuokrypiu. Nesisteminę riziką galima diversifikuoti, tačiau sisteminę riziką būdinga rinkos portfelio ir lemia jo pelningumą, todėl sisteminės rizikos negalima sumažinti diversifikuojant portfelį ir ji yra neišvengiama. Sisteminei rizikai įvertinti naudojamas „beta“ koeficientas (Cibulskienė, Grigaliūnienė 2007). Pagal CAPM modelį vertybinių popierių grąža yra tiesiog proporcinga „beta“ koeficientui (Bilgin, Basti 2011). Ryškiausias W. Sharpe sukurto modelio kritikas buvo Richard Roll. Jis 1977 m. teigė, kad W. Sharpe modelį reikia atmesti, nes jis sunkiai empiriškai įrodomas ir praktiškai sunkiai pasitvirtina, tačiau W. Sharpe modelis iki šių dienų yra vienas labiausiai žinomų ir naudojamų visame pasaulyje (Rasimavičius 2000).

Konkreto instrumento (akcijos) grąžą galima apskaičiuoti, naudojantis žinoma grąžos vidutine reikšme ir jo nuokrypio intervalu. W. Sharpe modelis supaprastino rizikos matavimą ir portfelio optimizavimą, kadangi šiam modeliui užtenka tik trijų akcijos parametrų: jautrumo koeficiento, grąžos vidutinės reikšmės ir jos nuokrypio intervalo (Alejūnienė 2013). Mokslinėje literatūroje CAPM modelis kritikuojamas dėl to, kad yra tam tikrų veiksnų, kurie prisideda prie tam tikro turto rizikos, o CAPM modelyje rizikai vertinti skaičiuojamas tik „beta“ koeficientas. Modernią portfelio teoriją 1976 m. patobulino Stephen Ross, sukurdamas Arbitražo įkainojimo teoriją (APT). Ši teorija siekia identifikuoti veiksnus, kurie gali nustatyti tam tikro turto rizikos veiksnus (Iqbal *et al.* 2012). Apskritai, modernioji portfelio teorija, kuomet buvo išskirtas nerizikingas turtas, kritikuojama dėl prielaidos, kad nėra tokio dalyko, kaip nerizikingas turtas (Mangram 2013). Grįžtant prie ekonomisto W. Sharpe, pažymėtina, kad jis taip pat yra sukūręs rodiklį, kuris pavadintas „Šarpo rodikliu“ ir kuriuo remiasi moderniosios portfelio teorijos šalininkai. Šį rodiklį W. Sharpe vadino „atlygio už nepastovumą“ rodikliu. Šis rodiklis įvertina, kaip efektyviai turto grąža kompensuoja investuotojo prisiimtą riziką. Rodiklis skaičiuojamas iš investicijos grąžos atimant nerizikingą grąžą ir rezultata padalijant iš rizikos mato (standartinio nuokrypio) (Jurkonytė-Dumbliauskienė, Paužuolis 2016).

Taigi, mokslinėje literatūroje analizuojami, tobulinami ir kritikuojami ne tik šiame straipsnyje aptarti modernios portfelio teorijos modeliai, tačiau ir kiti šiame straipsnyje paminėti ir nepaminėti modeliai, teorijos, kadangi modernioji portfelio teorija yra gana nauja finansų mokslo sritis. Modernioji portfelio teorija, kurios pradininku laikomas H. Markowitz'as, padėjo pagrindą moderniosios portfelio teorijos tobulinimui bei jos mokslinei analizei. Iš daugybės finansų rinkų problemų nuolat didelio mokslininkų ir praktikų dėmesio sulaukia optimalaus investicijų portfelio sudarymo problema (Stasytė 2012). Optimalaus portfelio pasirinkimo problemą mokslininkai nagrinėja iki šių dienų ir šis klausimas šiai dienai vis dar yra aktualus (Kucukbay, Araz 2016).

### Praktinis sprendimas, taikant Markowitz'o optimalaus portfelio teorijos modelį

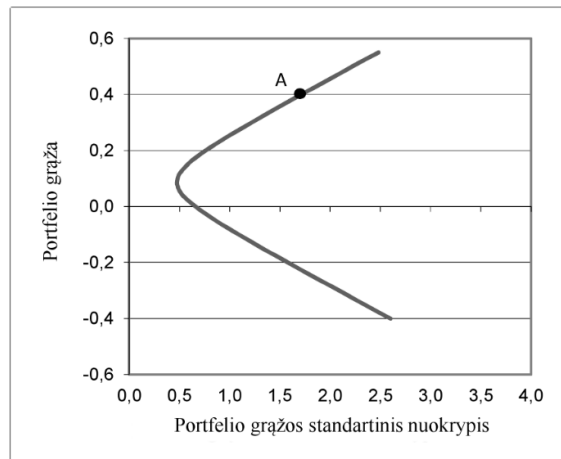
Šiame darbe buvo analiziškai išspęstas H. Markowitz'o uždavinys, aprašomas (1)–(4) formulių lygtimis, penkioms akcijoms, t. y.  $n = 5$ . Siekiama nustatyti, ar Baltijos šalių vertybinių popierių birža elgiasi pagal H. Markowitz'ą, t. y. tikrinama, ar investuotojui, norinčiam investuoti Baltijos šalių akcijų rinkoje, reiktų vadovautis H. Markowitz'o efektyvaus portfelio teorija.

Baltijos šalių birža (Vilniaus, Talino, Rygos) priklauso didžiausiai biržų operatoriai Nasdaq. Iš Baltijos šalių vertybinių popierių prekybos sąrašo atrinktos likvidžiausios bendrovės, kurių apyvarta sudaro 90 proc. visos rinkos apyvartos laikotarpiu nuo 2010 m. vasario 17 d. iki 2017 m. sausio 13 d. Tokių bendrovių yra 12 iš 32 Baltijos šalių vertybinių popierių oficialiame prekybos sąrašė esančių bendrovių. Likusios bendrovės nenagrinėjamos, kadangi biržoje jos neaktyvios. Bendrovių akcijų parametrų (gražos, gražos dispersijos, gražos kovariacijos) apskaičiavimui buvo naudojami laikotarpio nuo 2010 m. vasario 17 d. iki 2017 m. sausio 13 d., prekybos istoriniai duomenys. Toks laikotarpis pasirinktas siekiant įvertinti ilgojo laikotarpio prekybos svyravimus. Laikotarpis pasirinktas nuo 2010 m., kadangi šie metai laikomi pagyvėjimo metais, nuo 2009 m., kuomet Baltijos šalys patyrė ypač didelį ekonomikos kritimą (Kuokštis 2014), (Mockaitienė, Žmiejauskaitė 2010). Skaičiavimai, remiantis Markowitz'o uždaviniu, atlikti su aktyviausiomis atsitiktinai parinktomis penkių bendrovių akcijomis. Tyrimas atliktas su šių bendrovių akcijomis: „Šiaulių bankas“, „Olympic Entertainment Group“, „Tallink Grupp“, „Apranga“ ir „Linas Agro Group“. Pagal H. Markowitz'o efektyvaus portfelio teoriją buvo analiziškai apskaičiuota minimalios dispersijos aibė, ant kurios pagal H. Markowitz'o teoriją visi portfeliai yra optimalūs (optimalus rizikos ir pelningumo santykis). 1 ir 2 lentelėse yra nurodyti akcijų parametrai, gauti remiantis minėtų bendrovių istoriniais prekybos duomenimis nuo 2010 m. vasario 17 d. iki 2017 m. sausio 13 d., kai akcijų graža skaičiuojama kas mėnesį.

1 lentelė. Akcijų graža  $r_i$  (sudaryta autorių, remiantis NasdaqOMX Baltic prekybos duomenimis)  
Table 1. The stock return  $r_i$  (made by authors using Nasdaq OMX data)

Akcijos numeris, $i$	Bendrovės pavadinimas	Vidutinė graža
1	Šiaulių bankas	0,127
2	Olympic Entertainment Group	0,095
3	Tallink Grupp	0,091
4	Apranga	0,165
5	Linas Agro Group	0,020

Su šiais parametrais išsprendus lygčių (1)–(4) sistemą, kur  $X_1$  – „Šiaulių bankas“,  $X_2$  – „Olympic Entertainment Group“,  $X_3$  – „Tallink Grupp“,  $X_4$  – „Apranga“,  $X_5$  – „Linas Agro Group“, gauta tokia minimalios dispersijos kreivė (4 pav.):



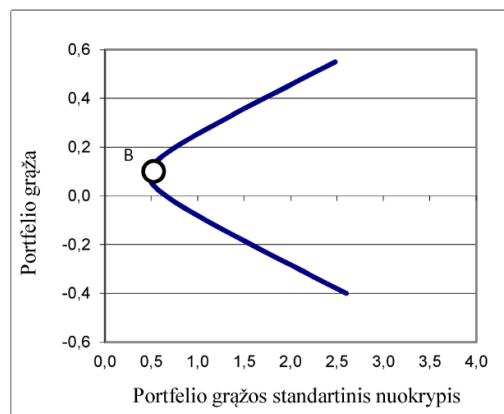
4 pav. Penkių akcijų minimalios dispersijos kreivė (sudaryta autorių)  
Fig. 4. Five shares minimal dispersion curve (made by authors)

2 lentelė. Akcijų kovariacijos  $Cov_{ij}$  reikšmės (sudaryta autorių, remiantis NasdaqOMX Baltic prekybos duomenimis)  
Table 2. The shares covariance  $Cov_{ij}$  value (made by authors using Nasdaq OMX data)

Akcijos numeris, $i, j$	1	2	3	4	5
1	0,467	0,174	0,117	0,155	0,101
2		0,786	0,403	0,301	0,257
3			0,590	0,188	0,184
4				0,604	0,166
5					0,386

Minimalios dispersijos kreivė investuotojui rodo, kokius akcijų derinius portfelyje rinktis, tikintis tam tikro pelningumo, o tuo pačiu, pasirinkus portfelį, esantį ant efektyviosios kreivės (viršutinė linija), investuotojas prisiims mažiausią galimą riziką. Būtent išsidėsčiusius ant šios kreivės portfelius investuotojas rinksis, priklausomai nuo jo toleruojamojo rizikos lygio. Kuo didesnis rizikos toleravimo lygis, tuo didesnė portfelio laukiama grąža. Iš 4 pav. matyti, kad investuotojas, kuris tikisi gauti, pavyzdžiui, 40 proc. grąžą, rinksis portfelį, kuris minėtame paveiksle pažymėtas raide „A“, šio portfelio rizika 170 proc. ir šį portfelį sudarys: 103 proc. „Šiaulių bankas“ akcijų, 0,42 proc. „Olympic Entertainment Group“ akcijų, 35 proc. „Tallink Grupp“ akcijų, 169 proc. „Apranga“ akcijų ir –207 proc. „Linus Agro Group“ akcijų (neigiama reikšmė reiškia trumpąjį pardavimą, kuomet investuotojas akcijas pasiskolina, o po tam tikro laiko investuotojas pasiskolintas akcijas turi grąžinti).

Toliau buvo tikrinama, ar realiai biržoje egzistuojantis minėtų penkių akcijų portfelis priklauso minimalios dispersijos aibei. Realaus nagrinėjamų penkių akcijų portfelio grąžos  $r_p$  ir jo grąžos dispersijos  $\sigma_p$  reikšmės buvo rastos formulių (1)–(4) pagalba. Kiekvienos iš nagrinėjamų akcijų svoris buvo proporcingas tos akcijos kapitalizacijai 2017 m. sausio 13 d. Visų penkių akcijų kapitalizacijos suma buvo prilyginta 1 (žr. formulę (1)). Kiti reikalingi akcijų parametrai yra 1 ir 2 lentelėse. Taip buvo gauta realiai rinkoje egzistuojančio penkių nagrinėjamų akcijų portfelio padėtis atžvilgiu tu pačių akcijų minimalios dispersijos kreivės (taškas B 5 pav.).



5 pav. Minimalios dispersijos kreivė ir penkių akcijų portfelis, sudarytas iš realių biržos prekybos duomenų (sudaryta autorių)  
Fig. 5. Minimum dispersion curves and the five stocks portfolio consisting of a real exchange of trade data (made by authors)

Šio rinkos portfelio grąža  $r_p$  yra 9,96 proc. B taške esantį portfelį sudaro: 13,19 proc. „Šiaulių bankas“, 20,80 proc. „Olympic Entertainment Group“, 47,08 proc. „Tallink Grupp“, 11,16 proc. „Apranga“ ir 7,77 proc. „Linus Agro Group“. 5 pav. pažymėtas taškas B yra ant efektyviosios kreivės, o tai reiškia, kad rinka linkusi elgtis pagal H. Markowitz'o optimalaus portfelio teorijos modelį. Taip pat, 5 pav. matyti, kad rinkos portfelis (taškas B) yra arti portfelio grąžos globalaus dispersijos minimumo taško. Tai reiškia, kad investuotojai, perkantys aukščiau išvardintų penkių įmonių akcijas Baltijos vertybinių popierių biržoje, elgiasi konservatyviai, t. y. jų prioritetas yra kuo mažesnė rizika. Tai yra vienetinis faktas, todėl yra tikslinga atlikti skaičiavimus su visų 12 likvidžiausių bendrovių akcijomis bei skirtingais jų deriniais. Darytina prielaida, kad, jei atliktus skaičiavimus su visų bendrovių akcijomis, grafinis vaizdas šiek tiek pasikeistų (portfeliai šiek tiek nutoltų nuo minimalios dispersijos kreivės), tuomet svarstyтина, kurie iš Markowitz'o pasekėjų pasiūlyti modeliai (moderniosios portfelio teorijos tikslinimai) tiktų Baltijos šalių vertybinių popierių biržai.

Taigi, darytina išvada, kad Baltijos šalių vertybinių popierių biržoje galimai veikia H. Markowitz'o modelis ir investuotojas, norintis investuoti į Baltijos šalių vertybinių popierių biržą, investiciniams sprendimams priimti gali vadovautis H. Markowitz'o modeliu.

Finansų rinkose galioja nerašyta taisyklė – investavimo metodas veikia tuomet, kai juo tikima. Modelis (teorijos, teoremos) yra tik įrankis finansų rinkoje, tačiau kartais gali būti ir didžiausiu „plaktuku“ sudarant finansų priemonių rinkinį (Mangram 2013).

### Išvados

Apibendrinus tyrimo rezultatus galima teigti, kad optimalaus portfelio sudarymo problema yra gana nauja finansų mokslo sritis, kurios pradžia laikoma 1952 m., Harry Markowitz'ui sukūrus moderniąją portfelio teoriją. H. Markowitz'o pasekėjai (James Tobin, William Forsyth Sharpe, Jack Treynor, Stephen Ross, Eugene Fama ir Kenneth French ir kt.) dirbo šia kryptimi ir tobulino H. Markowitz'o sukurtą efektyvaus portfelio teoriją. Modernioji portfelio teorija sulaukė nemažai kritikos iš įvairių mokslininkų, tačiau dar iki šių dienų mokslininkai dirba šia kryptimi.

Iš atliktos literatūros analizės matyti, kad visos sukurtos naujos teorijos ir modeliai remiasi pirmine H. Markowitz'o sukurtą teorija. Išsprendus H. Markowitz'o uždavinį, tiesinių lygčių sistemos pagrindu, buvo siekta išsiaiškinti, ar H. Markowitz'o efektyvaus portfelio modelis tinkamas Baltijos šalių vertybinių popierių biržai (ar Baltijos šalių vertybinių popierių birža elgiasi pagal Markowitz'ą ir ar investuotojui, norinčiam investuoti Baltijos šalių vertybinių popierių biržoje verta gilintis į H. Markowitz'o sukurtą moderniąją portfelio teoriją, o gal investuotojui reikėtų ieškoti kitų būdų investavimo sprendimams priimti). Analiziškai išsprendus H. Markowitz'o uždavinį efektyviam portfeliui rasti, penkių aktyvų atveju, pasitvirtino keliami hipotezė, kad realiai egzistuojantis investicinis portfelis yra optimalus H. Markowitz'o teorijos prasme, t. y. egzistuojančiai portfelio grąžai jo grąžos dispersija yra minimali. Taip pat, šiuo atskiru investavimo į likvidžiausias penkias akcijas gauta, kad investuotojai yra konservatyvūs, t. y. jie investuoja į akcijų portfelį su mažiausia rizika (mažiausia portfelio grąžos dispersija). Tikslinga atlikti skaičiavimus su visų 12 bendrovių akcijomis bei skirtingais jų deriniais ir patikrinti pasitvirtinusios hipotezės stiprumą.

Darytina prielaida, kad, jei atlikus skaičiavimus su visų bendrovių akcijomis, grafinis vaizdas šiek tiek pasikeistų (portfeliai šiek tiek nutoltų nuo minimalios dispersijos kreivės), tuomet svarstyтина, kurie iš Markowitz'o pasekėjų pasiūlyti modeliai (moderniosios portfelio teorijos tikslinimai) tiktų Baltijos šalių vertybinių popierių biržai.

### Literatūra

- Alejūnienė, O. 2013. *Fundamentaliosios analizės taikymas formuojant vertybinių popierių portfelį Nasdaq Omx Vilnius rinkoje*: magistro darbas [interaktyvus], [žiūrėta 2017 m. sausio 2 d.] Šiaulių Universitetas, Šiauliai. Prieiga per internetą: <http://gs.elaba.lt/object/elaba:2094961/2094961.pdf>
- Baltijos šalių vertybinių popierių birža [interaktyvus], 2016 [žiūrėta 2016 m. lapkričio 30 d.]. Prieiga per internetą: <http://www.nasdaqbaltic.com/market/?lang=lt>
- Bilgin, R.; Basti, E. 2011. A Test of the validity of capital asset pricing model in Istanbul stock exchange, *Euroeconomica* 4(30): 98–108 [interaktyvus], [žiūrėta 2017 m. sausio 2 d.]. Prieiga per internetą: <http://journals.univ-danubius.ro/index.php/euroeconomica/article/viewFile/932/896>
- Cibulskienė, D.; Grigaliūnienė, Ž. 2007. Modernios portfelio teorijos genezė ir vystymasis, *Ekonomika ir vadyba: aktualijos ir perspektyvos* 1(8): 52–61 [interaktyvus], [žiūrėta 2016 m. gruodžio 26 d.]. Prieiga per internetą: <http://etalpykla.lituanistikadb.lt/fedora/objects/LT-LDB-0001:J.04~2007~1367160442201/datastreams/DS.002.0.01.ARTIC/content>
- Dauginytė, D. 2009. *Investicinio portfelio valdymas: investicinės grąžos ir rizikos subalansavimas*: magistro darbas. Šiaulių Universitetas, Šiauliai.
- Esfahani, H. N.; Sobhiyah, M. H.; Yousefi, V. R. 2016. *Project portfolio selection via harmony search algorithm and modern portfolio theory* [interaktyvus], [žiūrėta 2016 m. lapkričio 25 d.]. Prieiga per internetą: [http://ac.els-cdn.com/S1877042816308473/1-s2.0-S1877042816308473-main.pdf?\\_tid=7b90d3aa-bbea-11e6-b4f8-00000aacb35d&acdnat=1481052825\\_b5d1dd2a2303a58abba7d7aec8f0e9ec](http://ac.els-cdn.com/S1877042816308473/1-s2.0-S1877042816308473-main.pdf?_tid=7b90d3aa-bbea-11e6-b4f8-00000aacb35d&acdnat=1481052825_b5d1dd2a2303a58abba7d7aec8f0e9ec)
- Haugen, R. A. 2001. *Modern investment theory*. New Jersey: Prentice Hall. 656 p.
- Heaton, J. B.; Polson, N. G.; Witte, J. H. 2016. *Deep portfolio theory* [interaktyvus], [žiūrėta 2016 m. lapkričio 25 d.]. Prieiga per internetą: <https://arxiv.org/pdf/1605.07230.pdf>
- Iqbal, N.; Khattak, S. R.; Khattak, M. A.; Ullah, I. 2012. Testing the arbitrage pricing theory on Karachi stock Exchange, *Interdisciplinary Journal of Contemporary Research in Business*. Muhammad Ali Jinnah University, Islamabad, Pakistan [interaktyvus], [žiūrėta 2016 lapkričio 30 d.]. Prieiga per internetą: <http://journal-archives26.webs.com/839-853.pdf>
- Jurevičienė, D.; Bapkauskaitė, G. 2014. Kompleksinis investicinių fondų veiklos vertinimas, *Verslo sistemos ir ekonomika* 4(1): 64–77 [interaktyvus], [žiūrėt: 2016 m. lapkričio 30 d.]. Prieiga per internetą: <https://www.mruni.eu/upload/ib-lock/097/VSE-14-4-1-06.pdf>
- Jurevičienė, D.; Jakavonytė, A. 2015. Alternative investments: valuation of wine as a means for portfolio diversification, *Business: Theory and Practice* 16(1): 84–93 [interaktyvus], [žiūrėta 2016 lapkričio 30 d.] Prieiga per internetą: <http://www.btp.vgtu.lt/index.php/btp/article/viewFile/btp.2015.606/pdf>
- Jurkonytė-Dumbliauskienė, E.; Paužuolis, V. 2016. Moderniosios, postmoderniosios portfelio teorijų ir black-litterman modelio palyginimas, *Mokslo taikomieji tyrimai Lietuvos kolegijose 2015/11 I dalis* [interaktyvus], [žiūrėta 2016 m. lapkričio 25 d.]. Prieiga per internetą: <http://ojs.kaunokolegija.lt/index.php/mttlk/article/view/16>
- Kancerevyčius, G. 2009. *Finansai ir investicijos*. Kaunas: Smaltijos leidykla. 904 p.
- Kucukbay, F.; Araz, C. 2016. Portfolio selection problem: a comparison of fuzzy goal programming and linear physical programming, *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications* [interaktyvus], [žiūrėta



- 2016 m. lapkričio 25 d.]. Celal Bayar University, Turkey. Prieiga per internetą: <http://ijocta.balikesir.edu.tr/index.php/files/article/view/284/130>.
- Kuokštis, V. 2014. *Kuo skiriasi Lietuva, Argentina ir Graikija* [interaktyvus], [žiūrėta 2017 m. vasario 1 d.]. Prieiga per internetą: <http://www.tspmi.vu.lt/tinklarastis/2014/08/v-kuokstis-kuo-skiriasi-lietuva-argentina-ir-graikija/>
- Lukaševičius, A.; Rutkauskas, A. V.; Šalengaitė, J. 2013. Akcijų kainų ciklų dinamikos įtaka tvariam portfelio vystymuisi, *Verslas: teorija ir praktika* 14(4): 287–296 [interaktyvus], [žiūrėta 2016 m. lapkričio 30 d.]. Prieiga per internetą: <http://www.btp.vgtu.lt/index.php/btp/article/viewFile/btp.2013.30/pdf>
- Mangram, E. M. 2013. A simplified perspective of the markowitz Portfolio theory, *Global Journal of Business Research*. [interaktyvus], [žiūrėta 2016 m. lapkričio 25 d.]. SMC University, Switzerland. Prieiga per internetą: [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2147880](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2147880)
- Mockaitienė, S.; Žmiejauskaitė, K. 2010. *Finansų rinkų krizės priežastys ir pasekmės Pabaltijo šalių akcijų rinkai* [interaktyvus], [žiūrėta 2017 m. vasario 1 d.]. Šiaulių universitetas, Socialinių mokslų fakultetas. Prieiga per internetą: <http://etalpykla.lituanistikadb.lt/fedora/objects/LT-LDB-0001:J.04~2010~1367173570425/datastreams/DS.002.0.01.ARTIC/content>.
- Rasimavičius, G. 2000. *Akcijų portfelio sudarymas ir valdymas besikuriančioje rinkoje*. Daktaro disertacijos santrauka. Socialiniai mokslai, ekonomika. Vilniaus universitetas.
- Rutkauskas, V.; Žilinskij, G. 2010. Financial leverage usage for active management of the investment portfolio, *Business: Theory and Practice* [interaktyvus], [žiūrėta 2017 m. sausio 2 d.]. Prieiga per internetą: <http://www.btp.vgtu.lt/index.php/btp/article/view/btp.2010.22>
- Rutkauskas, V.; Martinkutė, R. 2007. *Investicijų portfelio anatomija ir valdymas*: monografija. Vilnius: Technika. 360 p. <https://doi.org/10.3846/1371-M>
- Stasytytė, V. 2012. Investicijų portfelio sudarymas naudojant sprendimų paramos sistemą, *Business: Theory and Practice* 13(3): 253–263 [interaktyvus], [žiūrėta 2016 m. gruodžio 1 d.]. Prieiga per internetą: <http://www.btp.vgtu.lt/index.php/btp/article/view/btp.2012.27/pdf>
- Suarez, R. M. 2015. *Using modern portfolio theory to identify increased investment risks in private banks* [interaktyvus], [žiūrėta 2016 m. lapkričio 25 d.]. California State Polytechnic University, Pomona. Prieiga per internetą: <https://broncoscholar.library.cpp.edu/bitstream/handle/10211.3/158543/Roberto%20Martinez%20-%20Research%20Paper%20Final2vvvv.pdf?sequence=1>
- Valakevičius, E. 2008. *Investavimas finansų rinkose*. Vilnius: Technika. 339 p.
- Vilkancas, R. 2014. Omega atžvilgiu optimizuoto akcijų portfelio empiriniai tyrimai, *Verslas: teorija ir praktika* 5(1): 58–70 [interaktyvus], [žiūrėta 2016 m. gruodžio 1 d.]. Prieiga per internetą: [http://www.btp.vgtu.lt/index.php/btp/article/viewFile/btp.2014.06/pdf\\_1](http://www.btp.vgtu.lt/index.php/btp/article/viewFile/btp.2014.06/pdf_1)
- Žilinskij, G.; Rutkauskas, A. V. 2012. Akcijų investiciniu patrauklumu paremtas investicinio portfelio sudarymo modelis, *Verslas: teorija ir praktika* 13(3): 242–252 [interaktyvus], [žiūrėta 2016 m. spalio 2 d.]. Prieiga per internetą: <http://www.btp.vgtu.lt/index.php/btp/article/view/btp.2012.26/pdf>
- Žilinskij, G.; Rutkauskas, A. V. 2010. Finansinio sverto naudojimas aktyviai valdant investicijų portfelį, *Verslas: teorija ir praktika* 13(3): 242–252 [interaktyvus], [žiūrėta 2016 m. spalio 2 d.]. Prieiga per internetą: <http://www.btp.vgtu.lt/index.php/btp/article/view/btp.2012.26/pdf>

## APPLICABILITY OF H. MARKOWITZ MODEL TO BALTIC STOCK EXCHANGE

Aušrinė ZAKARKAITĖ, Viktoras FILIPAVIČIUS

**Abstract.** The analytical solution of H. Markowitz problem in case of five assets was obtained. The minimal variance set for five of most liquid stocks on Baltic stock exchange was determined. It was checked if actual portfolio of these five assets comply with minimum variance set. It appeared that actual portfolio seems to be located on the minimum variance set. Moreover, the actual portfolio is close to global minimum variance point. That indicates that investors behave in conservative manner – they prefer to invest at minimal risk, i.e., they construct the portfolio with minimal variance of the portfolio returns. The authors attempt to perform similar analysis with Baltic stock exchange indices as well as involve more assets into investigation.

**Keywords:** efficient stock portfolio, H. Markowitz portfolio theory, portfolio optimization, portfolio return, portfolio return variance, stock exchange, stock portfolio.